数理解析研究所講究録 1340 巻 2003 年 183-197

フレームの函数解析

塚田　真 (Makoto TSUKADA)　東邦大学理学部
加藤 雅彦 (Masahiko KATO)　東邦大学理学部

1　序論.

ウェーブレットの理論では

$$\psi_{n,k}(t)=\psi\left(2^{n}t+k\right)\qquad(t\in\mathbb{R})$$

で定義される関数族 $\{\psi_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ による展開公式

$$f(t)=\sum_{n,k\in\mathbb{Z}}c_{n,k}\psi_{n,k}(t)\qquad(t\in\mathbb{R})$$

における展開係数 $\{c_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ が重要な役割を果たす。ここで、大きく分けて二つの話題がある、一つは、$\{\psi_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ が直交基底となるようなうまい ψ を見つけることであり、そのような場合は $\{\psi_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ を適当に正規化すれば上の展開は Fourier 展開に他ならないので、展開に関して議論する余地は殆どない。一方、$\{\psi_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ が直交基底となることを諦めれば、今度は展開そのものに興味は移る。前者は直交ウェーブレットに関する話で、後者はフレームまたは Riesz 基底に関する話である。この小論の主な目的はフレームおよび Riesz 基底について、解説することにある。ウェーブレットの文脈から離れて、問題は次のように単純化できる: ベクトル空間 V(簡単のため、しばらくは有限次元とする) とその空間のベクトルの族 $\{e_n\}$ が与えられたとき、任意の $x\in V$ に対して

$$x\sim\sum_{n}c_{n}e_{n}$$

の展開公式を見いだしたい。このとき、もし $\{e_n\}$ が V の基底であれば、$\sim$ は $=$ として展開係数 $\{c_n\}$ は一意に決まる。特に、V が内積空間 (V は有限次元としているので、Hilbert 空間) であり、$\{e_n\}$ が V の正規直交基底であれば、$\{c_n\}$ は Fourier 係数

$$c_{n}=\langle e_{n}\,|\,x\rangle$$

に他ならない。$\{e_n\}$ が V の生成系であるときも、$\sim$ は $=$ とすることができるが、線形独立とは限らないので、この場合は展開係数 $\{c_n\}$ は一意に決まらない。しかし、何か標準的な展開係数の一つを求める公式を得たい。$\{e_n\}$ が V を生成していない場合、一般に $\sim$ は $=$ にすることはできないが、この場合は何らかの意味で最良近似となる展開を得たい。有限次元で考えれば、この問題は本質的には一般にランク落ちした係数行列を持つ線形の連立方程式の解を見つける問題ということ

2 双対フレームと一般化逆行列

$\mathbb{C}^n$ のベクトル $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m$ を考える。$V=\mathrm{span}\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m\}$ として、$\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m$ を V のフレームであるという言い方をする。フレームは自然に二つの線形写像を定義する。一つは $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^m$ への線形写像

$$f:\mathbf{x}\mapsto\begin{bmatrix}\langle\mathbf{e}_1\,|\,\mathbf{x}\rangle\\ \vdots\\ \langle\mathbf{e}_m\,|\,\mathbf{x}\rangle\end{bmatrix}$$

で (ここで $\langle\cdot|\cdot\rangle$ は内積、即ち $\langle\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}\rangle=\mathbf{y}^*\mathbf{x}$) であり、$\mathrm{kernel}(f)=V^\perp$ となっている。もう一つは $\mathbb{C}^m$ から $\mathbb{C}^n$ への線形写像

$$g:\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_m\end{bmatrix}\mapsto u_1\mathbf{e}_1+\cdots+u_m\mathbf{e}_m$$

であり、$\mathrm{range}(g)=V$ となっている。

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}e_{11}\\ \vdots\\ e_{n1}\end{bmatrix},\ \ldots,\ \mathbf{e}_m=\begin{bmatrix}e_{1m}\\ \vdots\\ e_{nm}\end{bmatrix}$$

として、

$$\mathbf{A}\overset{\mathrm{def}}{=}[\mathbf{e}_1\ \ldots\ \mathbf{e}_m]=\begin{bmatrix}e_{11}&\cdots&e_{1m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ e_{n1}&\cdots&e_{nm}\end{bmatrix}$$

とおくと、$\mathbf{A}$ は線形写像 g の行列表現であり、一方 $\mathbf{A}$ の随伴行列 $\mathbf{A}^*$ は線形写像 f の行列表現となる。即ち、線形写像 f と線形写像 g は互いに共役線形写像の関係にある。よく知られているように $\mathrm{range}(f)=\mathrm{kernel}(g)^\perp$ および $\mathrm{range}(g)=\mathrm{kernel}(f)^\perp$ の関係が成立する。線形写像 f の $\mathrm{range}(g)$ への制限は $\mathrm{range}(f)$ の上への 1 対 1 写像となるので、その逆写像を f' で表す。f' の定義域は $\mathrm{range}(f)$ であるので、このままでは行列表現できないが、q を $\mathbb{R}^m$ から $\mathrm{range}(f)$ 上への直交射影として $f^\dagger\overset{\mathrm{def}}{=}f'\circ q$ と定義すれば、$f^\dagger$ は $\mathbb{R}^m$ 全体で定義された線形写像となるので、その行列表現を $\mathbf{A}^{*\dagger}$ で表す。同様に、線形写像 g の $\mathrm{range}(f)$ への制限は $\mathrm{range}(g)$ の上への 1 対 1 写像となるので、その逆写像を g' で表す。p を $\mathbb{R}^n$ から $\mathrm{range}(g)$ 上への直交射影として $g^\dagger\overset{\mathrm{def}}{=}g'\circ p$ と定義すれば、$g^\dagger$ は $\mathbb{R}^n$ 全体で定義された線形写像となるので、その行列表現を $\mathbf{A}^\dagger$ で表す。$f^\dagger$ および $g^\dagger$ の行列 $\mathbf{A}^{*\dagger}$ および $\mathbf{A}^\dagger$ はそれぞれ、$\mathbf{A}^*$ および $\mathbf{A}$ の (Moore-Penrose の意味での) 一般化逆行列と呼ばれるものである。

$$\mathbf{A}^{*\dagger}=\mathbf{A}^{\dagger *}\qquad\cdots(1)$$

が成立する。また、$\mathbf{P}$ および $\mathbf{Q}$ をそれぞれ p および q の行列表現とするとき、

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}&=\mathbf{Q}\\ \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger&=\mathbf{P}\qquad\cdots(2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^*\mathbf{A}^{*\dagger} &= \mathbf{Q} \\ \mathbf{A}^{*\dagger}\mathbf{A}^* &= \mathbf{P} \qquad \cdots(3) \end{aligned}$$

が成立する。ここで

$$\mathbf{A}^{*\dagger} = [\mathbf{f}_1 \ \ldots \ \mathbf{f}_m] = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix}$$

とする。任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して、(1) と (2) を用いて

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{f}_i \mid \mathbf{x} \rangle \, \mathbf{e}_i$$

を、また (3) より

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{x} \rangle \, \mathbf{f}_i$$

の展開式を得る。$\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ は V のフレームであり、$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ の双対フレームと呼ぶ。

3 特異値分解

$\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ および $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ は半正定値行列であるので、いずれの行列の固有値も非負である。λ を $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ の正の固有値とし、それに対応する固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{x} \\ \lambda\mathbf{A}^*\mathbf{x} &= (\mathbf{A}^*\mathbf{A})\,\mathbf{A}^*\mathbf{x} \end{aligned}$$

が言えるので、λ は $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ の固有値であり、$\mathbf{A}^*\mathbf{x}$ がそれに対応する固有ベクトルであることがわかる。逆に、λ を $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ の正の固有値とし、それに対応する固有ベクトルを $\mathbf{y}$ とすると

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{y} &= \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{y} \\ \lambda\mathbf{A}\mathbf{y} &= (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)\,\mathbf{A}\mathbf{y} \end{aligned}$$

が言えるので、λ は $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ の固有値であり、$\mathbf{A}\mathbf{y}$ がそれに対応する固有ベクトルであることがわかる。即ち、$\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ および $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ の正の固有値は一致する。そこで、${\sigma_1}^2, \ldots, {\sigma_k}^2$ をそれらの固有値とし、$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ を対応する $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ の固有ベクトルとする。これらは正規直交系を成すようにとれ、$\mathrm{kernel}(\mathbf{A}^*)^\perp = \mathrm{range}(\mathbf{A})$ を張っている。$\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$ を $\mathrm{kernel}(\mathbf{A}^*)$（$\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ の固有値 0 に対する固有空間）を張る任意の正規直交系とする。$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の完全正規直交系となる。

$$\mathbf{v}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\|\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i\|}\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i \quad (i = 1, \ldots, k)$$

とおくと、$\mathbf{v}_i$ は $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ の固有値 ${\sigma_i}^2$ に対応する正規化された固有ベクトルである。$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ は正規直交系を成し、$\mathrm{kernel}(\mathbf{A})^\perp = \mathrm{range}(\mathbf{A}^*)$ を張っている。ここで、

$$\|\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i\|^2 = \langle \mathbf{A}^*\mathbf{u}_i \mid \mathbf{A}^*\mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_i \mid \mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_i \mid {\sigma_i}^2\mathbf{u}_i \rangle = {\sigma_i}^2$$

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i \quad (i = 1, \ldots, k)$$

であり、両辺に $\mathbf{A}$ を施すと

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}{\sigma_i}^2\mathbf{u}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i \quad (i = 1, \ldots, k)$$

を得る。更にこの両辺に $\mathbf{A}^*$ を施すことによって

$$\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i = \sigma_i\mathbf{v}_i \quad (i = 1, \ldots, k)$$

を得る。$\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_m$ を kernel($\mathbf{A}$)（$\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ の固有値 0 に対する固有空間）を張る任意の正規直交系とする。$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ は $\mathbb{C}^n$ の完全正規直交系となる。

任意の $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$\mathbf{Q}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{v}_i \mid \mathbf{y} \rangle \mathbf{v}_i$$

と Fourier 展開できるので、両辺に $\mathbf{A}$ を施すと

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{v}_i \mid \mathbf{y} \rangle \mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{v}_i \mid \mathbf{y} \rangle \sigma_i\mathbf{u}_i = \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\mathbf{u}_i{\mathbf{v}_i}^* \right) \mathbf{y}$$

を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0 &\stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] \\ \mathbf{V}_0 &\stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k] \end{aligned}$$

とし、また

$$\Sigma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_k \end{bmatrix}$$

とおけば、

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_0\Sigma_0{\mathbf{V}_0}^*$$

とも表現できる。更に、

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &\stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \\ \mathbf{V} &\stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m] \end{aligned}$$

とし、また $n \times m$ 行列 Σ を

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \sigma_k & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

で定義すれば、

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$$

とも表現できる。これを $\mathbf{A}$ の特異値分解と呼ぶ。

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{V}\Sigma^*\mathbf{U}^*$$

であり、また

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V}\Sigma^\dagger\mathbf{U}^*$$

である。ここで、$\Sigma^\dagger$ は $m \times n$ 行列であり

$$\Sigma^\dagger \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} {\sigma_1}^{-1} & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & {\sigma_k}^{-1} & \\ \hline & & & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & & & \end{array}\right]$$

と表現される。

$n = m$（即ち、$\mathbf{A}$ が正方行列）の場合、

$$\mathbf{V}^*\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{V} = \Sigma^2$$

なので、特異値分解は

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\,[\mathbf{A}]$$

と表現できる。ここで、$\mathbf{W} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{U}\mathbf{V}^*$ であり、$[\mathbf{A}] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{V}\Sigma\mathbf{V}^* = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{1/2}$ である。これは、$\mathbf{A}$ の極分解に他ならない。一方、特異値分解は Schatten 形式で

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\,(\mathbf{u}_i \otimes \overline{\mathbf{v}_i})$$

とも表現できる。これは、正規行列（$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$）のスペクトル分解（対角化）の一般化と考えることができる。実際、n 次の正規行列 $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,(\mathbf{v}_i \otimes \overline{\mathbf{v}_i})$$

とスペクトル分解できるが、ここで

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \sigma_i\omega_i \qquad (\sigma_i \geq 0, |\omega| = 1) \\ \mathbf{u}_i &= \omega_i\mathbf{v}_i \end{aligned}$$

となるようにとればよい。

4 KL展開

特異値分解はまた、Karhunen-Loeve 展開の特別な場合と考えることもできる。$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を σ-有限測度空間、$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間として、Ω 上で定義され $\mathcal{H}$ に値をとる強可測関数 $\boldsymbol{f}$ で

$$\int_\Omega \|\boldsymbol{f}\|^2 \, d\mu < \infty$$

を満たすものの全体を $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{H})$ で表す。任意の $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{H})$ に対して、完全正規直交系 $\{\overline{\varphi_j(\cdot)}\boldsymbol{e}_i\}$ による Fourier 展開を考えると、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(\omega) &= \sum_i \sum_j \langle \overline{\varphi_i} \boldsymbol{e}_j | \boldsymbol{f} \rangle \, \overline{\varphi_i(\omega)} \boldsymbol{e}_j \\
&= \sum_i \sum_j \int_\Omega \left\langle \overline{\varphi_i(\omega')} \boldsymbol{e}_j | \boldsymbol{f}(\omega') \right\rangle \mu(d\omega') \overline{\varphi_i(\omega)} \boldsymbol{e}_j \\
&= \sum_i \sum_j \overline{\varphi_i(\omega)} \int_\Omega \varphi_i(\omega') \langle \boldsymbol{e}_j | \boldsymbol{f}(\omega') \rangle \, \boldsymbol{e}_j \mu(d\omega') \\
&= \sum_i \overline{\varphi_i(\omega)} \int_\Omega \varphi_i(\omega') \sum_j \langle \boldsymbol{e}_j | \boldsymbol{f}(\omega') \rangle \, \boldsymbol{e}_j \mu(d\omega') \\
&= \sum_i \overline{\varphi_i(\omega)} \int_\Omega \varphi_i(\omega') \boldsymbol{f}(\omega') \mu(d\omega')
\end{aligned}$$

のように、$\mathcal{H}$ の完全正規直交系 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ によらず、$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の完全正規直交系 $\{\varphi_i\}$ だけによる展開式を得る。ここでの収束は 2 乗平均収束の意味である。なお、$\mathcal{H}$ の次元が 1 の場合は、単なる Fourier 展開に過ぎない。

$$K(\omega_1, \omega_2) = \langle \boldsymbol{f}(\omega_1) | \boldsymbol{f}(\omega_2) \rangle \qquad (\omega_1, \omega_2 \in \Omega)$$

と定義すると、K は半正定値であり

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_\Omega |K(\omega_1, \omega_2)|^2 \mu(d\omega_1) \mu(d\omega_2) &\leq \int_\Omega \int_\Omega \|\boldsymbol{f}(\omega_1)\|^2 \|\boldsymbol{f}(\omega_2)\|^2 \mu(d\omega_1) \mu(d\omega_2) \\
&\leq \int_\Omega \|\boldsymbol{f}(\omega_1)\|^2 \mu(d\omega_1) \int_\Omega \|\boldsymbol{f}(\omega_2)\|^2 \mu(d\omega_2) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

なので、Hilbert-Schmitt 作用素のスペクトル分解により

$$K(\omega_1, \omega_2) = \sum_i {\sigma_i}^2 \varphi_i(\omega_1) \overline{\varphi_i(\omega_2)}$$

が殆どすべての $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ に対して成立する (総和は 2 乗平均収束の意味)。このとき得られる完全正規直交系 $\{\varphi_i\}$ による展開式

$$\boldsymbol{f}(\omega) = \sum_i \overline{\varphi_i(\omega)} \int_\Omega \varphi_i(\omega') \boldsymbol{f}(\omega') \mu(d\omega')$$

を、Karhunen-Loeve 展開 (KL 展開) と呼ぶ。

$(T, \mathcal{T}, \tau)$ および $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を、いずれも σ 有限測度空間とし、$f \in L^2(T \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{F}, \tau \otimes \mu)$ に対して、$T \ni t \mapsto f(t, \cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は強可測関数と考えることができる。$f(t, \omega)$ を $f_t(\omega)$ と書く。このとき

$$K(s, t) = \int_\Omega \overline{f_s(\omega)} f_t(\omega) \mu(d\omega) \qquad (s, t \in T)$$

$$K(s,t) = \sum_i {\sigma_i}^2 \varphi_i(s)\overline{\varphi_i(t)} \qquad (s,t \in T)$$

とスペクトル分解でき、KL 展開は

$$f_t(\omega) = \sum_i (A\varphi_i)(\omega)\overline{\varphi_i(t)} \qquad (t \in T, \omega \in \Omega)$$

となる。ここで、A は f を積分核とする $L^2(T,\mathcal{T},\tau)$ から $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ への積分作用素、即ち

$$(A\psi)(\omega) = \int_T f_t(\omega)\psi(t)\tau(dt) \qquad (\psi \in L^2(T,\mathcal{T},\tau),\, \omega \in \Omega)$$

である。このとき

$$\begin{aligned}
\langle A\varphi_i | A\varphi_j\rangle &= \int_\Omega \overline{\int_T f_s(\omega)\varphi_i(s)\tau(ds)} \int_T f_t(\omega)\varphi_j(t)\tau(dt)\mu(d\omega) \\
&= \int_\Omega \int_T \overline{f_s(\omega)\varphi_i(s)}\tau(ds) \int_T f_t(\omega)\varphi_j(t)\tau(dt)\mu(d\omega) \\
&= \int_T \int_T \int_\Omega \overline{f_s(\omega)} f_t(\omega)\mu(d\omega)\overline{\varphi_i(s)}\varphi_j(t)\tau(ds)\tau(dt) \\
&= \int_T \int_T K(s,t)\overline{\varphi_i(s)}\varphi_j(t)\tau(ds)\tau(dt) \\
&= \int_T \int_T K(s,t)\varphi_j(t)\tau(dt)\overline{\varphi_i(s)}\tau(ds) \\
&= \int_T {\sigma_j}^2 \varphi_j(s)\overline{\varphi_i(s)}\tau(ds) \\
&= {\sigma_j}^2 \int_T \overline{\varphi_i(s)}\varphi_j(s)\tau(ds) = \begin{cases} {\sigma_j}^2 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

であるので、$\{A\varphi_i\}$ は直交系をなす。また、

$$L(\omega_1,\omega_2) = \int_T f_s(\omega_1)\overline{f_s(\omega_2)}\tau(ds) \qquad (\omega_1, \omega_2 \in \Omega)$$

によって定義される $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上の積分核を考えると

$$\begin{aligned}
\int_\Omega L(\omega_1,\omega_2)(A\varphi_i)(\omega_2)\mu(d\omega_2) &= \int_\Omega \int_T f_s(\omega_1)\overline{f_s(\omega_2)}\tau(ds) \int_T f_t(\omega_2)\varphi_i(t)\tau(dt)\mu(d\omega_2) \\
&= \int_T \int_T f_s(\omega_1) \int_\Omega \overline{f_s(\omega_2)} f_t(\omega_2)\mu(d\omega_2)\varphi_i(t)\tau(ds)\tau(dt) \\
&= \int_T \int_T f_s(\omega_1)K(s,t)\varphi_i(t)\tau(ds)\tau(dt) \\
&= \int_T f_s(\omega_1) \int_T K(s,t)\varphi_i(t)\tau(dt)\tau(ds) \\
&= \int_T f_s(\omega_1){\sigma_i}^2\varphi_i(s)\tau(ds) \\
&= {\sigma_i}^2 (A\varphi_i)(\omega_1)
\end{aligned}$$

であるので、L を積分核とする作用素の固有値 ${\sigma_i}^2$ に対する固有ベクトルが $A\varphi_i$ となっている。ま

た、Persevalの等式より

$$\begin{aligned}\sum_i \overline{(A\varphi_i)(\omega_1)}(A\varphi_i)(\omega_2) &= \sum_i \overline{\int_T f_t(\omega_1)\varphi_i(t)\tau(dt)} \int_T f_s(\omega_1)\varphi_i(s)\tau(ds) \\ &= \int_T f_t(\omega_1)\overline{f_t(\omega_2)}\tau(dt) \\ &= L(\omega_1,\omega_2) \qquad (\omega_1,\omega_2 \in \Omega)\end{aligned}$$

$A\varphi_i$ を正規化したものを ξ_i とすると

$$\begin{aligned}\varphi_i(t) &= \frac{1}{\sigma_i}\int_\Omega f_t(\omega)\xi_i(\omega)\mu(d\omega) \qquad (t \in T) \\ \xi_i(\omega) &= \frac{1}{\sigma_i}\int_T f_t(\omega)\varphi_i(t)\tau(dt) \qquad (\omega \in \Omega) \\ L(\omega_1,\omega_2) &= \sum_i {\sigma_i}^2\overline{\xi_i(\omega_1)}\xi_i(\omega_2) \qquad (\omega_1,\omega_2 \in \Omega) \\ f_t(\omega) &= \sum_i \sigma_i\xi_i(\omega)\overline{\varphi_i(t)} \qquad (t \in T, \omega \in \Omega)\end{aligned}$$

と表現される。

5 フレームの安定性とタイトなフレーム

有限次元の場合に話を戻す。$\mathbb{C}^n$ のベクトル $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m$ を考える (第 2 節の記号をそのまま用いる)。

(条件 1) ある正の定数 α および β が存在して、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$\alpha^2\|\mathbf{x}\|^2 \le \sum_{i=1}^m |\langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{x}\rangle|^2 \le \beta^2\|\mathbf{x}\|^2$$

この条件が成立するとき、フレームは安定であるという。条件の 2 番目の不等号は、$\mathbf{A}^*$ の有界性を述べたものに他ならない。従って、β の最良のものは $\|\mathbf{A}^*\|$ であり、これは特異値分解したときの $\sigma_1,\ldots,\sigma_k$ の中の最大のものに等しい。一方、最初の不等号が成立するための必要条件は、$\mathbf{x}$ がすべての $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m$ と直交するならば $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ということで、これは $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m$ が $\mathbb{C}^n$ を生成していることである。逆に、$\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m$ が $\mathbb{C}^n$ を生成しているならば、$\mathrm{kernel}(\mathbf{A}^*)=\{\mathbf{0}\}$ なので、線形写像 $\mathbf{A}^*:\mathbb{C}^n \to \mathrm{range}(\mathbf{A}^*)$ が逆写像を持つことになり、有限次元だからその逆写像の有界性より最初の不等号が成立するための十分条件でもある。このとき、最良の α は、$\sigma_1,\ldots,\sigma_k > 0$ の中の最小のものに等しい。安定性の条件に双対な条件として、次の条件がある。

(条件 2) ある正の定数 α および β が存在して、任意の $u_1,\ldots,u_m \in \mathbb{C}$ に対して

$$\alpha^2\sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 \le \left\|\sum_{i=1}^m u_i\mathbf{e}_i\right\|^2 \le \beta^2\sum_{i=1}^m \|u_i\|^2$$

この条件の 2 番目の不等号は、$\mathbf{A}$ の有界性を述べたものに他ならない。従って、β の最良のものは $\|\mathbf{A}\|$ であり、これはやはり特異値分解したときの $\sigma_1,\ldots,\sigma_k$ の中の最大のものに等しい。一方、最初

の不等号が成立するための必要条件は、$\sum_{i=1}^{m} u_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ ならば $u_1 = \cdots = u_m = 0$、即ち $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ が $\mathbb{C}^n$ が線形独立であることである。逆に、$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ が線形独立ならば、$\mathrm{kernel}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ なので、線形写像 $\mathbf{A} : \mathbb{C}^m \to \mathrm{range}(\mathbf{A})$ が逆写像を持つことになり、有限次元だからその逆写像の有界性より最初の不等号が成立するための十分条件でもある。このとき、最良の α は、$\sigma_1, \ldots, \sigma_k > 0$ の中の最小のものに等しい。

フレームが安定であり、$\alpha = \beta$ とすることができるとき、そのフレームはタイト或いは隙間のないフレームであるという。タイトなフレームは適当に全体をスカラー倍するっことによって、$\alpha = \beta = 1$ として一般性を失わない。このとき、$\mathbf{A}^*$ は $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^m$ の中への等距離写像、即ち即ち、

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{I}$$

となる。このことは、行列 $\mathbf{A}$ の行ベクトルが互いに直交しているということと同値である。即ち、

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ \vdots \\ e_{n1} \end{bmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} e_{1m} \\ \vdots \\ e_{nm} \end{bmatrix}$$

が安定なフレームであるとき (従って、$n \le m$ である)、各ベクトルを拡大して

$$\mathbf{e}_1{}' = \begin{bmatrix} e_{11} \\ \vdots \\ e_{n1} \\ \vdots \\ e_{m1} \end{bmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{e}_m{}' = \begin{bmatrix} e_{1m} \\ \vdots \\ e_{nm} \\ \vdots \\ e_{mm} \end{bmatrix}$$

を $\mathbb{C}^m$ の正規直交基底にできるとき、かつそのときに限り、安定なフレームである。

$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ が安定なフレームであるとき、$\mathbf{A}^*$ が $\mathbf{A}$ の一般化逆行列に他ならないので、双対フレームは自分自身である。従って

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i \otimes \overline{\mathbf{e}_i} = \mathbf{I}$$

が成立する。ここで、$J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ に対して

$$E(J) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in J} \mathbf{e}_i \otimes \overline{\mathbf{e}_i}$$

と定義すると、$E(\cdot)$ は $\{1, \ldots, m\}$ 上の正作用素値測度となる。このとき、$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ を拡大した $\mathbf{e}_1{}', \ldots, \mathbf{e}_m{}'$ によって

$$E'(J) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in J} \mathbf{e}_i{}' \otimes \overline{\mathbf{e}_i{}'}$$

で定義されるスペクトル測度 $E'(\cdot)$ は、ダイレーション理論でよく知られた Neumark のダイレーションとなっている。

6 無限次元の場合

これまでの話は、$\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{C}^m$ に埋め込むということであった。この節では、$\mathbb{C}^n$ を可分な無限次元複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に置き換えて、$\mathbb{C}^m$ を数列空間 l^2 に置き換えて、同様の議論を行う。

$e_1, e_2, \cdots \in \mathcal{H}$ とする。このとき、次の条件は同値である：

(1) 任意の $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$ に対して、$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ は強収束する；

(2) 任意の $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$ に対して、$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ は弱収束する；

(3) 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して、$\{\langle e_i \mid x\rangle\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$ である。

更に、これらの条件を満たすとき、$\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ は l^2 から $\mathcal{H}$ への有界線形写像であり、その共役線形写像は $x \mapsto \{\langle e_i \mid x\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ である。

証明　(1)⇒(2) は明らか。(2)⇒(3) を示す。

$$A_n\left(\{c_i\}_{i=1}^{\infty}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \qquad \left(\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2\right)$$

と定義する。任意の $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$ を固定する。$\{A_n(\{c_i\}_{i=1}^{\infty})\}_{n=1}^{\infty}$ は弱収束するので有界である（一様有界性定理）。このとき、$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ は l^2 から $\mathcal{H}$ への有界線形写像の族であり、$\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$ は任意であったので、再び一様有界性定理より、$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である。即ち、$K \geq 0$ が存在して、

$$\sup_n \|A_n\| \leq K$$

を満たす。従って、

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right\| = \left\|A_n\left(\{c_i\}_{i=1}^{\infty}\right)\right\| \leq \|A_n\| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2} \leq K \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2} \leq K \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2}$$

であるから、任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \;\middle|\; x \right\rangle\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right\| \cdot \|x\| \leq K \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2} \cdot \|x\|$$

が成立するので、$n \to \infty$ とした上で $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ とおくことによって

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i\right\| \leq K \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2}$$

を得る。このことから、$\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ は l^2 から $\mathcal{H}$ への有界線形写像であることがわかる。

また、

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} \overline{c_i} \langle e_i \mid x\rangle\right| = \left|\left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \;\middle|\; x \right\rangle\right| \leq K \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2} \cdot \|x\|$$

であるから、任意の $x \in \mathcal{H}$ を固定したとき、$\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \overline{c_i} \langle e_i \mid x \rangle$ は、l^2 上の有界線形汎関数であることがわかる。従って、Riesz の表現定理から $\{d_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$ が存在して、

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{c_i} \langle e_i \mid x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{c_i} d_i$$

を満たす。このことから、各 i に対して $d_i = \langle e_i \mid x \rangle$ でなければならず、$\{\langle e_i \mid x \rangle\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$ であることが示された。

(3)⇒(1) を示す。任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $\{\langle e_i \mid x \rangle\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$ であるとすると、$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{c_i} \langle e_i \mid x \rangle$ は収束するので

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{c_i} \langle e_i \mid x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \,\middle|\, x \right\rangle$$

も収束する。従って、$\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ は弱収束する。(2)⇒(3) の証明の過程で示したように、このとき

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \right\| \leq K \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2}$$

である。特に、

$$\left\| \sum_{i=n}^{\infty} c_i e_i \right\| \leq K \cdot \sqrt{\sum_{i=n}^{\infty} |c_i|^2} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

だから、$\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ は強収束する。

上の証明から、(1)〜(3) の条件は次と同値である：

($\mathbf{A}_0$) $a \geq 0$ が存在して、$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \right\|^2 \leq a \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$ を満たす；

($\mathbf{A}_0^*$) $a \geq 0$ が存在して、$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \langle e_i \mid x \rangle \right|^2 \leq a \cdot \|x\|^2$ を満たす。

以下、$e_1, e_2, \ldots$ は、上の条件を満たすものとして、有界線形写像 $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ を A で表し、その共役線形写像 $x \mapsto \{\langle e_i \mid x \rangle\}_{i=1}^{\infty}$ を A^* で表す。($\mathbf{A}_0$) 或は ($\mathbf{A}_0^*$) を満たす a の下限は、

$$\|A^* A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2$$

である。

次は、逆変換が存在するかという問題を考える。A に逆変換が存在してそれが有界となるための必要十分条件は、$\overline{\mathrm{range}}(A)$ が $\mathcal{H}$ で稠密であり、かつ $K > 0$ が存在して

$$\|A(\{c_n\}_{n=1}^{\infty})\| \geq K \cdot \|\{c_n\}_{n=1}^{\infty}\|$$

を満たすことである。これは、$b>0$ が存在して

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n\right\|^2 \geq b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

と言い換えてもよい。また、

$$\operatorname{span}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \subseteq \operatorname{range}(A)$$

で $\operatorname{span}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ は $\operatorname{range}(A)$ で稠密であることから、$\overline{\operatorname{span}}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \mathcal{H}$ と $\overline{\operatorname{range}}(A) = \mathcal{H}$ は同値である。A の逆変換が存在するための必要十分条件は

$(\mathbf{A}_1)$ $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の張る線形空間が $\mathcal{H}$ で稠密である；

$(\mathbf{A}_2)$ $b>0$ が存在して

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n\right\|^2 \geq b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

を満たす。

の 2 つが成立することである。$(\mathbf{A}_2)$ は、$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ が線形独立であるという条件を含んでいることに注意する。

A の逆変換が存在することと A^* の逆変換が存在することは同値であるので、この条件は A^* が存在するための必要十分条件である。しかし、A^* が存在するための必要十分条件を直接導きだすとどうなるであろうか。$\operatorname{range}(A^*)$ が l^2 で稠密であるという条件は、

$$\left\{\{\langle e_n \mid x\rangle\}_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, x \in \mathcal{H}\right\}^{\perp} = \{\{0\}_{n=1}^{\infty}\}$$

という条件と同値であり、これは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle e_n \mid x\rangle = 0$$

であれば $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = 0$ と同値である。これは更に、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} e_n \,\middle|\, x \right\rangle = 0$$

であれば $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = 0$ と同値である。従って、$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ が線形独立であることと同値である。一方、A^* の逆変換が存在するためのもう一つの条件は、$K>0$ が存在して

$$\|A^*(x)\| \geq K \cdot \|x\|$$

を満たすことであるが、これは $b>0$ が存在して

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n \mid x\rangle|^2 \geq b \cdot \|x\|^2$$

であると書き換えられる。従って、A^* の逆変換が存在するための必要十分条件は

$(\mathbf{A}_1^*)$ $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ が線形独立である；

$(\mathbf{A}_2^*)$ $b>0$ が存在して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle e_n \mid x\rangle\right|^2 \geq b\cdot\|x\|^2$$

を満たす。

の2つが成立することである。$(\mathbf{A}_2^*)$ は、$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の張る線形空間が $\mathcal{H}$ で稠密であるという条件を含んでいることに注意する（$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ と直交する $x\in\mathcal{H}$ は $x=0$ なので）。

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{H}$ が

$$(\mathbf{A}_0),(\mathbf{A}_1),(\mathbf{A}_2) \text{ を満たす}$$

或はこれと同値な条件

$$(\mathbf{A}_0^*),(\mathbf{A}_1^*),(\mathbf{A}_2^*) \text{ を満たす}$$

とき、$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathcal{H}$ の Riesz 基底であるという。

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{H}$ が Riesz 基底であるとき、$A:\{c_i\}_{i=1}^{\infty}\mapsto\sum_{i=1}^{\infty}c_ie_i$ および $A^*:x\mapsto\left\{\langle e_i \mid x\rangle\right\}_{i=1}^{\infty}$ は逆写像を持った。A^{-1} は e_i を

$$\epsilon_i \stackrel{\mathbf{def}}{=} \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$$

に写す。$\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ は l^2 の標準基底である。ここで、

$$\hat{e}_i \stackrel{\mathbf{def}}{=} (A^*)^{-1}\epsilon_i = \left(A^{-1}\right)^*\epsilon_i \qquad (i=1,2,\dots)$$

と定義すると、$\{\hat{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ も $\mathcal{H}$ の Riesz 基底となる。また、

$$\langle\hat{e}_i \mid e_j\rangle=\delta_{ij}$$

を満たす。$\{\hat{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ の双対 Riesz 基底と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
x &= (A^*)^{-1}A^*x \\
&= (A^*)^{-1}\left\{\langle e_i \mid x\rangle\right\}_{i=1}^{\infty} \\
&= (A^*)^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\langle e_i \mid x\rangle\,\epsilon_i \qquad \text{(Fourier 展開)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\langle e_i \mid x\rangle\,(A^*)^{-1}\epsilon_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\langle e_i \mid x\rangle\,\hat{e}_i
\end{aligned}$$

という展開式が得られる。また、Riesz 基底 $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ の双対 Riesz 基底が $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ となることより、

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle\hat{e}_i \mid x\rangle\,e_i$$

という展開式も成立する。いずれの展開式もノルム総和可能の意味である。

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathcal{H}$ の Riesz 基底であるための必要十分条件は、$\mathcal{H}$ の完全正規直交系 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$Te_n = \xi_n \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

により定義される線形作用素 T が位相同型となることである。

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $(\mathbf{A}_1^*)$ 即ち線形独立性を仮定せず、$(\mathbf{A}_0)$ と $(\mathbf{A}_2^*)$ を満たすとき、$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathcal{H}$ の安定なフレームであるという。有限次元の場合、安定性の条件 $(\mathbf{A}_2^*)$ は $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ が全体を生成することと同値であったが、無限次元の場合それだけでなく range(A^*) が閉であり $A^* : \mathcal{H} \to$ range(A^*) が有界な逆写像を持つことまで保証してくれる (有限次元なら自明)。従って、有限次元の場合と同様にして A^* の一般化逆写像と呼ばれる有界線形写像 $A^{*\dagger} : l^2 \to \mathcal{H}$ を定義することが可能である。そこで、Rieasz 基底の場合同様に

$$\hat{e}_i \overset{\text{def}}{=} A^{*\dagger}\epsilon_i \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

が定義できて、

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i \mid x \rangle \, \hat{e}_i$$

および

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \hat{e}_i \mid x \rangle \, e_i$$

の展開公式が成立する。$\{\hat{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ の双対フレームと呼ぶ。

有限次元の場合と同様にフレームがタイトであるとは、$(\mathbf{A}_0)$ と $(\mathbf{A}_2^*)$ における最良の a と b が同じに取れるときを言う。特に $a = b = 1$ であるとき、双対フレームは自分自身であり

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i \mid x \rangle \, e_i$$

の展開公式が成立する。

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle e_i \mid x \rangle\right|^2$$

を満たすので

$$x \mapsto \left\{\langle e_i \mid x \rangle\right\}_{i=1}^{\infty}$$

は $\mathcal{H}$ から l^2 の中への等長写像である。更に、$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}'$ である Hilbert 空間 $\mathcal{H}'$ が存在して、P を $\mathcal{H}'$ から $\mathcal{H}$ の上への直交射影として

$$e_i = P\overline{e}_i \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

を満たすように $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\mathcal{H}'$ の完全正規直交系 $\{\overline{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ にダイレーションすることができる。

参考文献

[1] Ola Bratteli, Palle Jorgensen, Wavelets through a Looking Glass, Birkhäuser, 2002.

[2] Charles K. Chui (ed.), Wavelets: A tutorial in theory and applications, Academic Press, 1992.

[3] Ingrid Daubechies, Ten lectures on wavelets, SIAM, 1992.

[4] Lokenath Debnath, Wavelet transforms and their applications, Birkhäuser, 2002.

[5] Y. C. Eldar, G. D. Forney, On quantum detection and the square-root measurement,IEEE Trans. Information Theory, **47**, no. 3, pp. 858–872, 2001.

[6] Y. C. Eldar, G. D. Forney, Optimal tight frames and quantum measurement, IEEE Trans. Information Theory, **48**, no. 3, pp. 599–610, 2002.

[7] Yves Meyer, Wavelets and operators, Cambridge University Press, 1992.

[8] Mary Beth Ruskai, Gregory Beylkin, Ronald Coifman et al. (ed.), Wavelets and their applications, Jones and Bartlett Publishers, 1992.

[9] David F. Walnut, An introduction to wavelet analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, 2002.